A 35. ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2004

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2004-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 35-ik, ezúttal már hetedszer nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2004. október 29 – november 8.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2004. október 29-én, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT)** magyar és angol nyelven, html, LaTeX, pdf és Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/.

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.64 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kívánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható.* Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX vagy Postscript formátumban, vagy – ha nincsenek benne képletek – közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.64 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu vagy ortvay@saas.city.tvnet.hu

Beadási határidő: 2004. november 8. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 8-án és 9-én lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 16-án lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Piróth Attila, Cserti József

1. A mellékelt űrfelvétel Budapest belterületét ábrázolja a Szentendrei-sziget déli csücskétől a lágymányosi ELTE-campusig:

   `http://ortvay.elte.hu/2004/budapest.jpg   (1.6 MB)`

   a) Mikor készült a kép (hónap, nap, óra, perc)?
   b) Milyen magasan vannak a felhők?

   (Pál András)

2. Robinson Péntekkel péntektől péntekig négyzet alakú tavat készíttetett, ahol szabad délutánjait úszkálással tölti. Fürdözését a tó körüli bozótból felbukkanó kannibálok veszélyeztetik, akik Robinsont étlapjukon szeretnék szerepeltetni. Robinson éppen a tó közepén fürdik, amikor a parton feltűnik egy kannibál. Megkezdődik a versenyfutás – életre-halálra. A kannibál nem tud úszni, futásának sebessége u. Robinson a parton gyorsabban fut a kannibálnál. A kannibál mindig arra fut, amerre menve hamarabb megközelítené a tó középpontját Robinsonnal összekötő egyenesnek a parttal való metszéspontját. Adjunk alsó korlátot Robinson úszási sebességére, amely mellett biztos a menekülése! Bónusz kérdés: Van-e a kannibálnak a fent leírtnál jobb stratégiája?

   (Farkas Szilárd és Zimborás Zoltán)

3. A rakétahajtás elvét egy vízszintes asztalon szabadon mozgó kiskocsival akarjuk illusztrálni. A kocsin egy tartály található, melyben kezdetben H magasságig áll a víz. A tartály aljához vízszintes cső csatlakozik, hossza L, melyen keresztül „hátrafele” áramolhat ki a víz. A cső keresztmetszete a tartály keresztmetszetének k-ad része. A víz tömege mellett a tartály és a kocsi tömege elhanyagolható.

   Írjuk le a kocsi mozgását!

   (Gnädig Péter)

4. Egy igen gyorsan forgó, gömb alakú, légkör nélküli bolygón állva köveket hajigálunk függőlegesen felfelé. Adjuk meg a kő földet érésének helyét az elhajítási pont földrajzi szélességének és a dobás kezdősebességének függvényében!

   (Veres Gábor)

5. Két Nap-típusú csillag kering egymás körül. Legnagyobb távolságuk háromszorosa a Föld–Nap távolságnak. Pályájuk éggömbre eső vetület-ellipszisei kölcsönösen áthaladnak a másik ellipszis középpontján.

   a) Az év (azaz a teljes keringési idő) hányad részét töltik a csillagok a másik csillag pályáján belül? (Pontos numerikus választ kérünk, lehetőleg számítógép használata nélkül!)

   b) Hogyan változik az év folyamán a két csillagot összekötő egyenes felezőpontjába elhelyezett kicsiny fekete test hőmérséklete?

   (MIT feladat nyomán Dávid Gyula)

6. A bolygóközi tér egy kis tartományában homogénnek tekinthető, $\mathbf{B}$ indukciójú mágneses mező van. Egy kezdetben az origóban álló proton mellett az $\mathbf{r}_0$ vektorral jellemzett helyen $\mathbf{v}_0$ kezdősebességű másik proton található. A $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{v}_0$ vektorok páronként merőlegesek egymásra.

   Mekkora lesz a két részecske legnagyobb távolsága a mozgásuk során, ha közöttük csak elektromágneses erők hatnak? Mennyi idő múlva lesz a protonok távolsága ismét a kezdeti érték?

   Mekkora $v_0 = v_{\mathrm{krit}}$ esetén marad a részecskék távolsága időben állandó (ahol $v_0 = |\mathbf{v}_0|$)? Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor v_0 nem sokkal tér el a v_{krit} értéktől! Kialakulhatnak-e zárt pályák?

   Tekintsünk el a sugárzási veszteségtől, továbbá hanyagoljuk el a mozgó protonok mágneses terét a külső $\mathbf{B}$ mellett!

   (Gnädig Péter)

7. Testek falról vagy egymásról való visszaverődésének jellemzésére szolgál az ütközési szám: a visszaverő sík normálisára vetített sebességvektor ütközés utáni és ütközés előtti abszolút értékének hányadosa. Kísérletileg kimutatták, hogy kellően puha visszaverő felület esetén ez az érték egynél nagyobb is lehet. Modellezzük a jelenséget két dimenzióban, korong falnak való ütköztetésével! Adjunk kvantitatív magyarázatot arra, hogyan lehetséges ez az energiamegmaradás megsértése nélkül!

   (Borsányi Szabolcs)

8. Vezessük le a kerékpárnyomok egyenletét!

Hátsókerék-meghajtású, L tengelytávolságú kerékpárunkkal vízszintes talajon kerékpározunk. Milyen összefüggés van az első és a hátsó kerék által leírt nyomok között? Hogyan érdemes megadni a kerékpárnyomok görbéjének egyenletét, hogy az összefüggés egyszerű alakot vegyen föl?

Eredményünket alkalmazzuk néhány egyszerű esetre: milyen görbét ír le a hátsó kerék, ha az első kerékkel egy a) egyenes vonalat b) körvonalat követünk (a váz és az első kerék által bezárt szög kezdetben tetszőleges)? Aszimptotikusan milyen görbét ír le a hátsó kerék, ha az első kerékkel egy szinuszgörbét követünk? Mik a görbe paramérterei? Megjelenik-e a paraméterek között az L tengelytávolság?

Egy kerékpárversenyen N darab kerékpáros teker egymás után Δ követési távolsággal, azonos v sebességgel. Mindegyik kerékpáros az előtte lévő kerékpáros hátsó kerekének nyomvonalát követi, hogy kihasználja a szélárnyékot. Egy nagyon hosszú egyenes útszakasz után az út egy $R \gg L$ sugarú köríven elfordul és merőlegesen halad tovább. Hogyan fognak megváltozni a követési távolságok, ha mindenki továbbra is az előtte lévő hátsó kerekének nyomvonalát követi, és tartja a sebességet is?

(Gáspár Merse Előd)

9. Egy légkör nélküli, gömb alakú bolygó körül három, egyenlő oldalú háromszög alakban elhelyezett űrállomás kering szinkronpályán. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a bolygó sugara, keringési és tengelyforgási ideje megegyezik a Földével, a központi csillag pedig a Naphoz hasonló!) Az űrállomások közti teherforgalom lebonyolítására forradalmi módszert vezetnek be: a csomagokat „vízszintesen” (azaz a szinkronpálya érintője irányában) egyszerűen kilökik az űrállomásról, a többit a bolygó gravitációjára bízzák.

a) Mekkora sebességgel kell kilökni a csomagot, ha a pályán előttünk, illetve mögöttünk haladó űrállomás a címzett? Mennyi a kézbesítés ideje? Ábrázoljuk a csomag pályáját a kibocsátó állomással együtt mozgó és együtt forgó koordinátarendszerben (melynek egyik tengelye a bolygó középpontja felé, a másik a körpálya érintője irányába, a harmadik pedig a pálya normálisa irányába mutat)!
b) Valakinek eszébe ötlik, hogy a módszer hatékonysága megnő, ha a csomagok repülés közben egyet pattannak a bolygón. E célból a bolygó megfelelő pontjaira sima, vízszintes, tökéletesen rugalmas „pattanótereket” kell építeni. Hogy változnak ekkor a korábbi kérdésre adott válaszok?
c) Az állomás parancsnoka úgy dönt, hogy nem érdemes bevezetni a b) pontban javasolt módosítást, hiszen csak kb. 4 százalékos menetidő-megtakarítást lehetne elérni, ez pedig nem éri meg a pattanóterek létesítéséhez szükséges beruházási költségeket. Már csak egy kérdés marad: miért nincs légköre a bolygónak?

Pótkérdés (csak magyar versenyzőknek): melyik magyarországi turistaházról nevezték el a bolygót?

(Dávid Gyula)

10. A tehetetlen tömeg definíciója Newton II. törvénye: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ahol m a test helyétől és sebességétől független állandó. A két vektormennyiség közti lineáris kapcsolat azonban nemcsak skalár tömeget enged meg. Vizsgáljuk meg annak következményeit, ha m tenzor!

a) Hogyan módosulnak a szokásos megmaradási törvények?
A feladat most következő b) és c) része kétdimenziós térben végbemenő mozgásokra vonatkozik. Legyen a tömegtenzor izotróp, azaz forgásinvariáns (vigyázat, ez nem csak az egységtenzor számszorosa lehet)!
b) Ha a tömeg tenzorjellegű, külső gerjesztés nélküli disszipatív rendszerben is kialakulhat nemtriviális stacionárius állapot. Vizsgáljuk meg a fent megadott izotróp tömegtenzorú részecske mozgását a következő alakú centrális potenciálban:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \cdot |\mathbf{x}|^{b-1} - \eta\mathbf{v}, \quad k, \eta > 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

Milyen feltételek mellett marad a részecske mozgása véges? Mi a stacionárius megoldás?
c) Ha $N > 1$ azonos, izotróp tömegű részecske mozog egymás terében, a külső potenciál el is hagyható:

$$\mathbf{F}_i = -k\sum_{j\neq i}^{N}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{b-1} - \eta\mathbf{v}_i, \quad k, \eta > 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

Milyen esetben találunk véges stacionárius megoldást? Mi az?

Az analitikus meggondolásokhoz elvezető numerikus eredmények is érdekelnek.

(Asbóth János)

11. Egy súlyzó alakú bolygó kering a Nap körül. (A bolygó két tömegponttal modellezhető, amelyeket egy merev, d hosszúságú, elhanyagolható tömegű rúd köt össze. A mozgás síkban történik, és a Nap tömegéhez képest a bolygóé elhanyagolható.) Amikor a bolygó nem szimmetrikusan áll a Napból a bolygó tömegközeppontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorhoz képest, akkor a gravitáció a bolygót az $\mathbf{r}$ irányába próbálja forgatni. Ha keringés közben a bolygó épp napközelben (illetve naptávolban) van, amikor az egyik (illetve a másik) irányban hat rá a forgatónyomaték, úgy a bolygó keringéséhez és forgásához tartozó perdület cserélődhet.

a) Milyen összefüggés érvényes e két mozgás között?
b) Gyorsulhat-e tartósan a bolygó forgása a keringés kárára? Ha igen, milyen feltételekkel?
c) Mikor zuhanhat bele a bolygó a Napba? (A gravitációs erőket egészen a Nap felszínének eléréséig elegendő ugyanolyan rendig számítani, mint a mozgás kezdetén.)

(Fehér Titusz)

12. Rúdinga leng homogén gravitációs térben. A $t = 0$ időpontban kitérése φ_1 (az egyensúlyi helyzettől mérve), T idő alatt a $\varphi_2 = \pi$ szögű pontba jut el. Keressük a legkisebb energiájú megoldásokat, azaz kerüljük a felesleges többletfordulatokat!

Hogyan függ az inga energiája T-től, valamint a kiindulási szögtől, aszimptotikusan nagy T értékekre?

(Bajnok Zoltán)

13. Henger alakú edényben vizet forgatunk állandó ω szögsebességgel. A vízhez rögzített koordinátarendszerben álló, homogén, R sugarú fagolyót helyezünk a vízbe. Hol fog elhelyezkedni a golyó hosszú idő elteltével? Vizsgáljuk a kis golyók, illetve az $R \gtrsim g/\omega^2$ sugarú golyók esetét is!

(Kocsis Bence, Egri Győző és Kormos Márton)

14. Egy gyorsan forgó neutroncsillagot – durva közelítésben – modellezzük összenyomhatatlan folyadékkal, melyet a saját gravitációs tere tart össze.

Mutassuk meg, hogy ebben a modellben a csillag – nem túl nagy szögsebesség esetén – lehet forgásellipszoid alakú! Legfeljebb mekkora lehet a „lapultsága”?

(Gnädig Péter)

15. Történt egyszer, hogy Huygens, Fresnel és Bernoulli szeles időben kimentek a pusztába dobolni. Huygensnél volt a dob, amit időnként megütött. Fresnel a szél irányában, Bernoulli a széllel szemben azonos távolságból hallgatták Huygens játékát. A szél vízszintesen fújt, és sebessége $v = \alpha z$ alakban változott a magassággal (értéke a feladat szempontjából lényeges magasságokban jóval kisebb volt a hangsebességnél). Mit hallott Fresnel, és mit hallott Bernoulli? (A dob hangját kibocsátáskor rövid delta-impulzussal közelíthetjük, a levegő viszkozitásától eltekinthetünk.)

(Kocsis Bence, Egri Győző)

16. Relativisztikus részecskék mozgását vizsgáljuk sztatikus, centrális $V(r)$ Lorentz-skalár mezőben. Hanyagoljuk el a részecske visszahatását a skalármezőre és az azt keltő központi testre! A feladat során végig a centrumhoz rögzített inerciarendszerben dolgozzunk!

Az a) és c) feladatok esetén vizsgáljuk meg a nemrelativisztikus közelítést, és annak érvényességi tartományát! Mi a korlátok fizikai jelentése?
a) A részecskék R sugarú körpályán mozognak. Hogyan függ a $V(r)$ skalárpotenciál az r sugártól, ha a keringés periódusideje független a körpálya R sugarától?
b) Legyen a skalárpotenciál Kepler-alakú: $V(r) = -\alpha/r$. Érvényes-e a körpályákon végbemenő relativisztikus mozgásokra Kepler harmadik törvénye?
c) Milyen alakú a $V(r)$ skalárpotenciál, ha a relativisztikus mozgás a hagyományos Kepler-féle (zárt, a vonzócentrumot a fókuszpontban tartalmazó) ellipszispályákon megy végbe?
d) Mekkora ütközési paraméterrel kell a b) pontban szereplő skalárpotenciál centruma felé lőni egy E energiájú pontrészecskét, ha azt akarjuk, hogy eltérülésének szöge pontosan kétszerese legyen a nemrelativisztikus esetben várhatónak?

(Dávid Gyula)

17. Csubakka kitekint a Millenium Falcon ablakán, és hirtelen észrevesz egy nagyon nagy sebességű meteort, amely a lázadók űrbázisa felé tart. Csubi természetesen tud a birodalmiak azon kedvenc trükkjéről, hogy nagy tükrök mozgatásával megtévesztik és elcsalják az őrhelyükön lévő lázadó űrhajókat. A meteort egy gázfelhő veszi körül, ezért alaktorzulásokat nem tud megfigyelni. Hogyan tudná Csubi megállapítani rövid idő alatt, hogy csak egy nagy sebességű tükörről visszaverődő képet lát-e, vagy valóban egy meteor tart a lázadók bázisa felé? Minden esetben működik ez a módszer?

(Zimborás Zoltán)

18. A megfigyelőhöz képest állandó sebességgel mozgó lézer fényének tulajdonságai a Doppler-effektus alapján írhatók le. Mi történik a fényt kibocsátó lézer egyenletes *gyorsításakor*? (Számoljunk a gyorsítás nagyságának és irányának függvényében!)

(Fehér Titusz)

19. Coulomb potenciálon szóródó relativisztikus elektron hatáskeresztmetszete jól ismert a kvantumelektrodinamikából. A formula klasszikus ($\hbar \to 0$) relativisztikus határesete nagyon egyszerű:

$$\frac{d\sigma(p,\theta)}{d\Omega} = \gamma^2(1 - v^2 \sin^2\theta/2)\, \frac{d\sigma(p,\theta)}{d\Omega}\bigg|_{\mathrm{Rutherford}},$$

ahol p az elektron hármasimpulzusa, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, θ a szórasi szög és v az elektron sebessége (mindegyik a Coulomb potenciál forrásának rendszeréből nézve, és $c = 1$ mértékegységben). Magyarázzuk meg klasszikus (azaz nem kvantumos) eszközökkel az $\gamma^2(1 - v^2 \sin^2\theta/2)$ relativisztikus korrekciót!

(Szabó Kálmán)

20. A Black Hole Travels űrutazási iroda egzotikus utazásokat szervez kalandvágyó milliomosoknak. Az utasok egy katalógusból választhatják ki a meglátogatni kívánt fekete lyukat. Az érdeklődőket luxusűrhajón szállítják a fekete lyuk közelébe, és ott körpályára állnak. A fekete lyuk horizontját megközelítve az utasoknak fantasztikus látványban lehet részük (az égbolt beszűkül, a csillagok elkékülnek, stb.).

a) Adott M tömegű sztatikus fekete lyuk esetén mennyire közelíthetik meg a horizontot, illetve

b) milyen mélyen ereszkedhetnek be egy M tömegű, maximálisan forgó Kerr-féle fekete lyuk ergoszférájába,

hogy a nehézségi gyorsulás ne lépje túl a Földön megszokott értéket, de az árapályerők hatása se jelentsen *túl nagy* kényelmetlenséget a látogatóknak? Vizsgáljuk az $M = 1M_\odot$ és az $10^6 M_\odot$ eseteket!

A *túl nagy* fogalmát a feladat során a megoldóknak kell pontosítaniuk.

(Kocsis Bence)

21. Két, egymás mögött véges kezdeti távolsággal, de azonos sebességgel induló megfigyelő zuhan sugárirányban egy fekete lyukba. Látják-e egymást? Ha igen, milyen irányban? Hogyan változik a válasz a mozgás során? Van-e olyan szakasza az egyik megfigyelő pályájának, amit a másik soha nem pillanthat meg? És fordítva? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a megfigyelőknek 4π térszöget látó szemük van!)

(Dávid Gyula)

22. Tapasztalati tény, hogy spirálgalaxisokban a korong síkjába eső csillagok körmozgásának kerületi sebessége nem függ a galaxis középpontjától való távolságtól. Érdekes módon ez az összefüggés a középponttól olyan távol is fennáll, ahol már nincs számottevő látható anyag a galaxisban. Az ellentmondás standard megoldási módja szerint feltételezzük, hogy létezik további nem látható (sötét) anyag a galaxisban, és ennek a gravitációs hatása okozza fenti jelenséget.

Egy másik megközelítési mód lehet, hogy nem tételezzük fel sötét anyag jelenlétét, hanem a Newton-törvényt módosítjuk. Tegyük fel, hogy két tömegpont közötti gravitációs erő

$$\mathbf{F} = -G(r)\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

alakú, ahol $G(r)$ a távolságfüggő gravitációs konstans. Egy spirálgalaxis sűrűségeloszlását közelítőleg

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 e^{-\alpha r}\delta(z)$$

alakúnak vehetjük, ahol r a középponttól való távolság, $\alpha \approx 4$ kpc, z pedig a galaxis korongjának síkjára merőleges koordináta.

Hogyan válasszuk $G(r)$-et, hogy ez a sűrűségeloszlás önmagában megmagyarázza kerületi sebességre vonatkozó megfigyeléseket? Bónusz kérdés: a Naprendszerre vonatkozó megfigyelések segítségével cáfolható-e, hogy $G(r)$ valóban ilyen alakú?

(Kocsis Bence és Egri Győző)

23. Tárgyaljuk a kvantummechanika alapján egy rögzített tömegközéppontú, és ekörül szabadon forgó,

$$\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

tehetetlenségi nyomatékú merev test ($\Theta_1 > 0$, $\Theta_2 > 0$, $\Theta_3 > 0$) mozgását!

a) Mi lesz a rendszer Hamilton-operátora?
b) Mekkorák az energia-sajátértékek a $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$ gömbszimmetrikus esetben? Hányszorosan degeneráltak az egyes energiaszintek?
c) Makroszkópikusan mégis „forogni" látjuk a merev testeket, azaz a helyzetüket például időben változó szögváltozókkal jellemezhetjük. Ez hogyan egyeztethető össze a kvantummechanikai leírással?
d) Hogyan módosulnak az energiaszintek, ill. azok degeneráltsága, ha $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$?
e) Mit mondhatunk a $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3 \neq \Theta_1$ esetben?

(Tóth Bálint)

24. Egy kvantumos rendszer Hamilton-operátora (a $\hbar = 1$ egységrendszerben) a következő:

$$\mathcal{H} = H_0^{-1}\begin{pmatrix} H_0^2 - \omega^2 & 2H_0\,\omega\cos\alpha & 2H_0\,\omega\sin\alpha \\ 2H_0\,\omega\cos\alpha & \omega^2\cos(2\alpha) - H_0^2 & \omega^2\sin(2\alpha) \\ 2H_0\,\omega\sin\alpha & \omega^2\sin(2\alpha) & -\omega^2\cos(2\alpha) - H_0^2 \end{pmatrix},$$

ahol α egy állandó skalár paraméter, H_0 pedig az ω frekvenciájú, m tömegű egydimenziós harmonikus oszcillátor közismert Hamilton-operátora. Határozzuk meg (a lehető legegyszerűbb módszerrel) a rendszer energiaspektrumát (és ha tudjuk, a sajátállapotokat is)!

(Cserti József és Dávid Gyula)

25. Helyfüggően adalékolt (doppolt) félvezetők leírása során gyakran alkalmazzák a „változó effektív tömeg” módszerét. Ekkor az anyagban mozgó elektron tömegét a hely adott $M(\mathbf{r})$ függvényének tekintik. A feladat kvantummechanikai tárgyalásakor fellép az a nehézség, hogy a $H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ Hamilton-függvény kinetikus tagjában a szokásos csererelációknak eleget tevő $\hat{\mathbf{p}}$ és $M(\hat{\mathbf{r}})$ operátorok nem kommutálnak, ezért a klasszikus kifejezés több különböző operátorral is helyettesíthető. Javasolták például a következő kifejezéseket:

$$a)\quad \hat{\mathbf{p}}\frac{1}{2M(\hat{\mathbf{r}})}\hat{\mathbf{p}} \qquad b)\quad \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{p}}^2\frac{1}{M(\hat{\mathbf{r}})} + \frac{1}{M(\hat{\mathbf{r}})}\hat{\mathbf{p}}^2\right) \qquad c)\quad \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{M(\hat{\mathbf{r}})}}\hat{\mathbf{p}}^2\frac{1}{\sqrt{M(\hat{\mathbf{r}})}}$$

Vizsgáljuk az egydimenziós esetet! Mutassuk meg, hogy mindhárom fenti kifejezés hermitikus energiaoperátorhoz vezet, és hogy az egyikről a másikra való áttérés csupán egy „mértéktranszformációt” jelent! Milyen „kompenzáló” transzformációt kell végrehajtani a $V(x)$ potenciálon? Tegyük fel, hogy az $M(x)$ folytonosan differenciálható függvénye a helynek!

Hogyan módosulnak eredményeink, ha megengedjük, hogy a $M(x)$ függvényben véges ugrások is felléphessenek (például két különböző anyag határfelületén)? Milyen határfeltételeket kell kirónunk a helyreprezentációban felírt Schrödinger-egyenletet megoldó stacionárius hullámfüggvényre?

(Kormányos Andor)

26. Egy elektron kétdimenziós mozgását a spin-pálya kölcsönhatást is figyelembe véve az alábbi Hamilton-operátorral írhatjuk le:

$$\hat{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{\alpha}{\hbar}\left(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x\right),$$

ahol α a spin-pálya kölcsönhatás erősségére jellemző állandó, és σ_x, σ_y a Pauli-mátrixok. Külső mágneses tér esetén a Hamilton-operátort a szokásos $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ transzformációval kell módosítani, ahol e az elektron töltése és $\mathbf{A}$ a külső mágneses térnek megfelelő vektorpotenciál. A Zeeman-effektust egy további tag hozzáadásával vehetjük számításba: $\mu_B \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{B}$, ahol μ_B a Bohr-magneton és $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ a Pauli-mátrixokból képzett vektor.

Határozzuk meg az elektron energiaszintjeit homogén, z irányú mágneses térben !

(Cserti József)

27. a) Bizonyítsuk be, hogy lassan változó forgások esetén a vektoroknak a szögsebességre vett vetülete adiabatikus invariáns! Azaz: tekintsünk egy kétszer folytonosan differenciálható $\omega(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ függvényt, majd egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}^+$ számot választva az $\mathbf{r}(t) : [0, 1/a] \to \mathbb{R}^3$ vektorra vonatkozó következő differenciálegyenletet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t) = \omega(at) \times \mathbf{r}(t).$$

Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r}(0)$ kezdeti értéktől függetlenül

$$\lim_{a\to 0} \frac{\big(\boldsymbol{\omega}(1/a), \mathbf{r}(1/a)\big)}{|\boldsymbol{\omega}(1/a)|} = \frac{\big(\boldsymbol{\omega}(0), \mathbf{r}(0)\big)}{|\boldsymbol{\omega}(0)|},$$

ahol $(\cdot,\cdot)$ a skaláris szorzatot jelöli!

b) Bizonyítsuk be, hogy az időfüggő perturbációszámítás „adiabatikusan invariáns”! Azaz: tekintsünk egy kétszer folytonosan differenciálható $f(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $f(0) = 1$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ és $\lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$, és legyen konvergens az $\int_0^\infty |f''|$ integrál! Legyen H egy ismert Hamilton-operátor és V egy perturbáló operátor! Bizonyítsuk be, hogy $H + V$ sajátvektorait az időfüggetlen elsőrendű perturbációszámítással meghatározva fázisfaktorok erejéig ugyanarra az eredményre jutunk, mintha egy $a \in \mathbb{R}^+$ számot választva az időfüggő $H + f(at)V$ operátorra végeznénk el az időfüggő elsőrendű perturbációszámítást a teljes $t \in [0,\infty)$ intervallumon, majd utána az eredménynek a $a \to 0$ határesetét tekintenénk (itt a potenciált tehát nem bekapcsoljuk, hanem kikapcsoljuk)! Mi történik második rendben (példaként vegyük az $f(t) = e^{-t}$ függvényt)? Mi a helyzet, ha a kikapcsolás véges ideig tart csak, azaz valamilyen $b \in \mathbb{R}$ mellett $t > b$-re $f(t) = 0$?

c) Mi az összefüggés a feladat a) és b) része között? Azaz: sejtsük meg az általános matematikai állítást, amelynek a feladat a) és b) része egyaránt egy-egy speciális esete. (A fellépő vektorterek az egyszerűség kedvéért legyenek véges dimenziósak!)

(Pozsgay Balázs)

28. A nemkommutatív kvantummechanika, azaz az olyan kvantummechanika, amelyben a koordinátakomponensek nem felcserélhetők, manapság nagy érdeklődésre tart számot. Vizsgáljuk meg a nemkommutatív kvantummechanikának talán a legegyszerűbb esetét, egy kényszereknek alávetett kvantummechanikai modellt!

Tekintsük a kétdimenziós síkban mozgó töltött részecske nemrelativisztikus mozgását a síkra merőleges homogén, állandó mágneses térben! A modell Hamilton–függvénye:

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2m}\sum_{i,j,k=1}^{2}\left(p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}q_j\right)\left(p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ik}q_k\right)$$

A modell $m \to 0$ határesetét vizsgáljuk meglehetősen intuitív módon: a Hamilton–függvény végességének megőrzéséhez kirójuk a $C_i = p_i + \frac{B}{2}\varepsilon_{ij}q_j = 0$ kényszereket. Lássuk be, hogy a kanonikus kvantálás után ezek a kényszerek operátor szinten nem róhatók ki, azaz nem létezik az eredeti állapottérnek olyan (nemtriviális) altere, amelyen a C_i operátorok 0-t adnának! Ehelyett járjunk el a következőképpen:

a) Adjunk meg egy $\mathcal{M}$ alteret és egy erre vetítő $P_{\mathcal{M}}$ ortogonális projektort úgy, hogy a kényszeres modell operátorait ($\hat{\mathcal{O}}^c$) a kényszermentes $\hat{\mathcal{O}}$ megfigyelhető mennyiségekből $\hat{\mathcal{O}}^c = P_{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{O}}P_{\mathcal{M}}$ módon származtatva az $\hat{\mathcal{O}}^c$–k éppen a Dirac-féle csererelációknak tegyenek eleget!

b) Látni fogjuk, hogy a $\hat{p}_1^c$, $\hat{p}_2^c$ impulzuskomponensek már nem lesznek felcserélhetők, mint ahogy a koordinátakomponensek sem. Ugyanakkor a kényszermentes rendszerünknek szimmetriája a kétdimenziós euklideszi csoport. Miért kellene ezt a szimmetriát egy alkalmasan definiált $m \to 0$ határátmenetnek elrontania? Vizsgáljuk meg, hogy az eltolásoknak milyen ábrázolása származik az eredeti kényszermentes modellbeli szokásos ábrázolásból! Nem tudnánk-e az impulzuskomponensek nemkommutativitásától egy ekvivalens *sugár*ábrázolásra való áttéréssel megszabadulni?

c) A kvantálás során egy klasszikus $p_1^n p_2^m$ monomhoz operátort rendelünk, amely $\hat{p}_1^c$-nek és $\hat{p}_2^c$-nek polinomja. Milyen rendezési szabály adódik az impulzuskomponens–operátorokra?

d) Legyen f és g két, csak a koordinátáktól függő függvény! Definiáljunk egy olyan (nem feltétlenül kommutatív) $*$–szorzatot, amely kielégíti a

$$P_{\mathcal{M}}\,(f*g)(\hat{q}_1,\hat{q}_2)\,P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}\,f(\hat{q}_1,\hat{q}_2)\,P_{\mathcal{M}}\,g(\hat{q}_1,\hat{q}_2)\,P_{\mathcal{M}}$$

egyenlőséget. Mi lesz a $q_1^k q_2^l$, $q_1^m q_2^n$ monomok $*$–szorzata?

(Farkas Szilárd és Kormos Márton)

29. Vizsgáljunk egy nulla hőmérsékletű, kicsiny szuperfolyékony hélium- (^{4}He) cseppet! Ismeretes, hogy a cseppben terjedő hanghullámokat egy megfelelő effektív kvantumtérelmélet segítségével írhatjuk le, a hanghullámok kvantumait fononoknak hívjuk. Minden fononmódushoz a határozatlansági reláció értelmében zérusponti rezgés tartozik. Mekkora energiasűrűséget hoznak létre a zérusponti rezgések a héliumcseppben? Mekkora nyomást okoz ez az energiasűrűség? Miért nem robbantja szét vagy roppantja össze ez a nyomás a cseppet?

(Segítség: a fononok maximális energiája a Debye-energia lehet. Az esetleges számításokat kölcsönható *Bose-gázra* végezzük el, és ebből próbáljunk következtetéseket levonni a kvantumfolyadékra vonatkozóan!)

(Egri Győző)

30. Két kisméretű ionfelhő ütközik. Minden ion egyforma, és nagyon sok van belőlük a felhőkben. A részecskék közti elektromágneses kölcsönhatást elhanyagolhatjuk, a jelenséget csak az igen rövid hatótávolságú erős kölcsönhatás kormányozza. Ismerjük annak a valószínűségét, hogy végbemegy legalább egy felhőközi ütközés (tehát az egyik felhő egyik ionja ütközik a másik felhő egyik ionjával): ez a valószínűség p, ahol $0 < p < 1$. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két felhőközi ütközés történik?

(Veres Gábor)

31. Tegyük fel, hogy a Föld domborzati elemeinek különböző tulajdonságok szerinti eloszlása skálafüggetlen eloszlást mutat! Például feltételezhetjük, hogy a szigetek nagyság szerinti eloszlása, a hegyek magasság szerinti eloszlása, a folyók hossz szerinti eloszlása vagy vízgyűjtő területeik nagyság szerinti eloszlása mind-mind skálafüggetlen eloszlást mutat valamilyen hatványkitevővel. Próbáljuk ezekről és még más ezekhez hasonló eloszlásokról megmutatni, hogy valóban skálafüggetlenek! Készítsünk modelleket, melyek az egyes eloszlások hatványkitevői között kapcsolatokat létesítenek! Ellenőrízzük ezeket a kapcsolatokat (térképről vagy adatbázisból vett) mérési adatok alapján! Megjelenik-e egyes hatványkitevők közötti kapcsolatban a Föld felületenek topológiája?

(Gáspár Merse Előd)

32. Hát, elegem van az egész Ortvay versenyből! Rá kellett jönnöm, hogy a sok feladat megoldása mellett az embernek más, nagyobb dolga is van... Ennek sikeres abszolválása után kezemben egy WC-papír gurigával kihajolok toronyházunk legfelső emelete legkisebb helyiségének ablakán, majd a TV-ben látott reklámon felbuzdulva új kísérletbe kezdek. A papírszalag végét a falhoz szorítom, és érdeklődéssel figyelem, amint a tekercs legördül a fal mentén. Majd a kezemben maradt papír hátulján lázas számolásba kezdek...

Hogyan változik a papírhenger középpontjának magassága az idő függvényében? Mikor és hol szakad el (ha elszakad) a papír?

(Dávid Gyula és Cserti József)

```
\end{document}
```